UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
UNIVERSIDADE VIRTUAL DO ESTADO DO MARANHÃO
COORDENADORIA DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA
NA MODALIDADE ENSINO A DISTÂNCIA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA À DISTÂNCIA

LUIS FAUSTINO DA SILVA
RONDINELE PLABIO SOUSA SANTOS

CONSTRUÇÃO ALGÉBRICA DO CORPO COMPLEXO

CAXIAS
2009

LUIS FAUSTINO DA SILVA
RONDINELE PLABIO SOUSA SANTOS

CONSTRUÇÃO ALGÉBRICA DO CORPO COMPLEXO

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina e Universidade Virtual do Estado do Maranhão na modalidade à distância.

Orientador Prof. Dr. Oscar Ricardo Janesch

CAXIAS
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
Departamento de Matemática
Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância

"Construção Algébrica do Corpo Complexo"

Monografia submetida a Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática-Formação do professor em cumprimento parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 01/09/2009

Dr. Oscar Ricardo Janesch (CFM/UFSC - Orientador) ____________________

Dr. Joel Santos Souza (CFM/UFSC - Examinador) ____________________

Dr.Daniel Norberto Kozakevich (CFM/UFSC – Examinador) ____________________

Profª Neri Terezinha Both Carvalho (Drª)
Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Florianópolis, Santa Catarina, setembro de 2009.

À minha família, pelo incentivo.

A Deus, pela oportunidade de crescimento.

"A ciência pelo caminho da exatidão, só tem dois olhos: A matemática e a lógica".

De Morgan.

SUMÁRIO

Introdução 8

Capítulo 1 9

Números Complexos 9

Capítulo 2 15

Construção Algébrica do Corpo Complexo 15

2.1 Construção do corpo $\mathbb{C}$ 15

2.2 Operações na forma algébrica 26

2.3 Norma e conjugado 31

Capítulo 3 40

Potências, raízes e regiões do plano complexo 40

3.1 Potência 40

3.2 Cálculo da raiz n-ésima complexa de $z \in \mathbb{C}$ 46

3.3 Regiões do plano complexo 55

Considerações Finais 59

Referências 60

Introdução

O presente trabalho versa acerca do tema Construção Algébrica do Corpo Complexo que tem em Gauss, Euler, D'Alambert, expressões máximas no que se refere a descobertas que impulsionaram não somente esse assunto como outros na área da Matemática. O objetivo dessas reflexões consiste em construir formalmente o corpo complexo, estudar potências e raízes, bem como discorrer sobre alguns subdomínios de $\mathbb{C}$.

No capítulo primeiro trataremos do histórico do assunto, informando o percurso que Gauss percorreu para comprovar sua tese. No segundo, serão mostrados definições, axiomas e proposições. Quanto ao terceiro tópico, abordaremos potências, raízes e regiões do plano complexo.

Capítulo 1

Números Complexos

Considerado o Mestre de todos nós, Leonhard Euler (1707-1783), foi protagonista dos maiores avanços durante a maior parte do século XVIII, dominou o cenário das Ciências Exatas, sendo considerado o matemático que mais produziu obras em todos os tempos nas áreas mais variadas. Autor de 900 tratados, mesmo depois de sua morte o jornal Academia de Ciências de São Petersburgo, depois de 48 anos, ainda publicava sua produção.

Primeiro matemático a definir as bases sólidas da teoria dos números complexos, bem como a tratar da Mecânica Celeste Newtoniana por meio do cálculo, Euler foi o maior criador de simbologia matemática de todos os tempos, segundo Gilberto G. Garbi (2006), consagrando o uso dos símbolos: π e também i para $\sqrt{-1}$.

Teve como orientador Jean Bernoulli, membro da famosa família de matemáticos, com quem se encontrava aos sábados para resolver problemas e tirar dúvidas. Estudava ainda História, Direito e Filosofia o que garantia-lhe uma formação eclética e humanista. Em 1727, participou de um concurso cujo tema era posicionamento de mastros em navios e recebeu menção honrosa. Em 1735, atingiu a fama ao resolver o Problema de Basel, isto é, encontrou a soma da série infinita dos inversos dos quadrados dos números naturais. Publicou, em 1736, o tratado Mechanica, um marco na área de Física; em 1748, o tratado Introductio in Analysin Infinitorum e em 1755 o famoso Institutiones Calculi Differentialis.

Enfrentou problemas pessoais, ficou cego, sendo nessa fase difícil que escreveu um tratado substancioso sobre Cálculo Integral de nome Institutiones

Calculi Integralis, bem como o abrangente estudo sobre a teoria do movimento da Lua.

O certo é que os seus feitos tão originais o colocam num alto patamar seja pelo que produziu em prol da Ciência seja pelo que influenciou depois de sua morte.

Outro matemático bastante reconhecido pelo que contribuiu para com a área foi o francês Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783). Filho abandonado pela mãe, foi adotado por um modesto casal que recebeu ajuda do pai biológico para sua educação. Isso não foi em vão, pois desde cedo destacou-se. Estudou Direito e Medicina, mas a Matemática foi sua paixão à qual dedicou-se com obstinação. Aos 21 anos destacou-se pelo estudo sobre Cálculo Integral, sendo admitido na Academia de Ciências da França com 23 anos. Juntamente com Diderot editou a conhecida Enciclopédia ou Dicionário Explicativo das Ciências, das Artes e dos Ofícios.

Amigo de Euler com quem manteve produtivas discussões para o avanço nas áreas de Equações Diferenciais, Dinâmica, Fundamentos de Cálculo, Convergências de Séries. É de sua autoria o estratagema para reduzir as equações da Dinâmica às da Estática: se $\sum F_i = ma$ (a resultante das forças que atuam sobre um corpo é igual ao produto de sua massa pela aceleração), subtraindo daquela resultante o produto, pode-se imaginar o corpo em equilíbrio estático. Eliminou a idéia de grandezas infinitesimais, concebendo no lugar o conceito de limite, além de esclarecer a questão da convergência de séries infinitas.

Realizou grandes estudos em Astronomia Matemática e publicou livros que são atualmente verdadeiros clássicos: Tratado do Equilíbrio e do Movimento dos Fluidos e Teoria Geral dos Ventos.

Chamado para integrar a Academia da Prússia, em substituição a Euler, afirmou que nenhum matemático sabia o suficiente para tal. Além de ser considerado o primeiro expoente da Matemática da era pós-Cálculos, tinha como virtude a modéstia.

Ao abordarmos a área de Matemática é difícil não relacionar ao alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), cognominado de Príncipe dos Matemáticos. De família modesta, aos três anos demonstrou genialidade ao apontar um erro no cálculo que o pai fizera. Ainda menino surpreendeu o professor ao somar os inteiros de 1 a 100, formando 50 pares multiplicados por 101. Cultivou profícua amizade com Johann Martin C. Bartels que o incentivou e o aproximou de um matemático que, por sua vez, o apresentou ao Duque Ferdinand de cujo patrocínio dependeu durante muitos anos. Aos 15 anos já dominava elevados assuntos da área e aos 18, já apaixonado pela Teoria dos Números, foi estudar na Universidade de Gottingen, passando a pesquisar sobre a Teoria das Congruências a respeito do qual escreveu o célebre tratado Disquisitiones Arithmeticae. Ao estudar a Equação Ciclotômica provou ser possível a utilização de régua e compasso na divisão do círculo em n partes iguais sempre que n for um primo do tipo $n = 2^{2^s} + 1$, com s inteiro positivo.

Tornou-se doutor ao demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra, cuja tese afirmava que toda equação polinominal de coeficientes reais ou complexos tem, no corpo complexo, pelo menos uma raiz real ou imaginária, assunto este que os matemáticos Euler e D' Alembert já tinham abordado sem muito avanço. É de sua autoria a expressão "números complexos" usada para nomear a raiz quadrada de –1. Foi a partir da sua definição do anel dos inteiros algébricos que Ernest Kummer, Richard Dedekind e Leopold Kronecker criaram a teoria dos números algébricos. A paixão pela área que tanto estudou o inspirou a dizer que a Matemática é a rainha das ciências e a Teoria dos Números é a rainha da Matemática.

Dedicou-se também à astronomia chegando a criar um método para acompanhar a órbita dos satélites o que lhe garantiu o cargo de professor e diretor do observatório de Gottingen por quarenta anos, além de publicar uma obra-prima na área: Teoria motus corporum coelestium. Inventou o helítropo que transmite sinais por meio de luz refletida, o magnetômetro bifiliar que mede o nível e a capacidade de um campo magnético e o telégrafo elétrico cujo dispositivo transmite mensagens escritas sem transportar letras sobre fios.

Pelas pesquisas e conseqüente avanço que trouxe à Matemática, justo foi o título com o qual é conhecido – o de O Princípe dos Matemáticos.

Para falar de grandes matemáticos, é necessário incluir Richard Dedekind (1831-1916). Um dos mais talentosos alunos de Gauss, doutorou-se sob sua orientação. Professor de Matemática no Colégio Técnico de Brunswick, exercitou o rigor científico nas pesquisas sobe a natureza dos números reais, investigando questões corriqueiras, sendo nos gregos que buscou idéias para dar embasamento lógico à Teoria dos Números Reais, além de postular que "todos os tipos de números reais poderiam ser postos em correspondência biunívoca com todos os pontos de uma reta" (Garbi, 2006, p. 290) que ficou conhecido por Axioma de Dedekind-Cantor. Conseguiu uma definição dos números irracionais a partir dos racionais, usando um conceito chamado Corte de Dedekind que consiste em (primeiro ele dividiu o conjunto dos racionais em duas classes onde uma ele chamou de E a outra de D de tal forma que todo racional tanto pertence a E ou a D com a seguinte condição de que todo número racional de E seja menor de que todo número racional de D. Tal corte pode ser feito de inúmeras maneiras e existem, então, três possibilidade mutuamente excludentes:

1 - Em E há um número racional 'e' maior de que todos os demais da classe.

2 - Em D há um número racional 'd' menor do que todos os demais da classe.

3 - Em E não há um número racional máximo e em D não há um número racional mínimo.

A alternativa de existência de um número racional máximo em E e de um racional mínimo em D é descartada porque, como é sempre possível encontrar um racional entre dois outros, haveria um racional entre tal máximo e tal mínimo que não pertenceria a nenhuma das classes.

Portanto Dedekind postulou, então, que os cortes do tipo 1 e 2 definem números racionais e o corte do tipo 3 definem números irracionais.

Depois dessa definição avançou seus estudos sobre as operações aritméticas com os números reais, racionais ou irracionais, chegando a elucidar em 1872, uma problemática antiga que outros matemáticos haviam começado: A construção axiomática do conjunto dos números reais. Dedekind morreu em 1916.

Curiosamente, a construção axiomática dos números complexos foi concluída em 1833, por William R. Hamilton (1805-1865). Hamilton assumiu que os conhecimentos sobre os números reais eram sólidos (e isso se mostrou verdadeiro com a axiomatização feita 39 anos depois por Dedeking), e formalizou a construção dos números complexos a partir dos números reais.

No próximo capítulo faremos a construção dos números complexos, mas com uma linguagem diferente da usada por Hamilton. Faremos a construção algébrica.

Capítulo 2

Construção Algébrica do Corpo Complexo

O formalismo é, por excelência, a maneira para dar "alicerce" a qualquer teoria construída no seio do raciocínio matemático. Com a construção formal do conjunto dos números complexos não foi diferente. Foi preciso tomar como base de raciocínio a teoria de anéis, domínios e corpos, portanto por meio destas teorias constrói-se de forma solida o edifício do corpo dos complexos.

2.1 Construção do corpo $\mathbb{C}$

A construção do corpo dos números complexos começa pela idéia de que dentro deste conjunto sempre será possível encontrar raízes para todo polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}$. Desta forma a estrutura algébrica mais conveniente será a estrutura de corpo.

Ser corpo implica ser anel e domínio, desta forma é necessário definir o que é anel e domínio para depois chegar na definição de corpo.

Definição 2.1.1. Dado um conjunto $A \neq \phi$, munido de duas operações, denominadas de soma (+) e produto (.), diz-se que A tem a estrutura de **anel**, se as seguintes propriedades abaixo forem satisfeitas.

A_1 (Associatividade da soma): Dados quaisquer $x,\ y,\ z \in A$,

$$(x+y)+z = x+(y+z).$$

A_2 (Comutatividade da soma): Dados quaisquer $x,\ y \in A$,

$$x+y=y+x.$$

A_3 (Existência do elemento neutro para soma): Existe um elemento em A, chamado "zero de A" ou elemento neutro, indicado pelo símbolo "0_A", tal que:

$$x + 0_A = 0_A + x = x, \text{ para qualquer } x \in A.$$

A_4 (Existência do elemento oposto para soma): A cada elemento $x \in A$ corresponde um elemento $x' \in A$ indicado por $-x$ tal que,

$$x + x' = x' + x = 0 \quad \text{ou} \quad x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

A_5 (Associatividade do produto): Dados quaisquer $x, y, z \in A$,

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

A_6 (Distributividade da multiplicação em relação à adição): Quaisquer que sejam $x, y, z \in A$,

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z. \text{ e } (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Observação 2.1.1. O anel A é chamado **anel comutativo** quando satisfaz o axioma.

A_7 (Comutatividade do produto): Dados quaisquer $x, y \in A$,

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

O anel A é chamado **anel com unidade** quando satisfaz o seguinte axioma.

A_8 (elemento neutro do produto): Existe um elemento $1_A \in A$ tal que

$$x \cdot 1_A = 1_A \cdot x = x, \text{ para qualquer } x \in A.$$

Diz-se que o anel $(A, +, .)$ é um anel **sem divisores de zero**, quando satisfaz o seguinte axioma.

A_9 (produto nulo): Dados $x, y \in A$, temos

$$x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0.$$

Definição 2.1.2. Se $(A,\ +,\ .)$ é um anel comutativo, com unidade e sem divisores de zero, dizemos que $(A,\ +,\ .)$ é um domínio de integridade.

Definição 2.1.3. Se um anel comutativo com unidade $(A,\ +,\ .)$ satisfaz o axioma. A_{10} (inverso multiplicativo): Dados $x \in A,\ x \neq 0$ existe $y \in A$, tal que $x \cdot y = x \cdot y = 1$. Dizemos que $(A,\ +,\ .)$ é um **corpo**.

Observação 2.1.2. O elemento y da definição acima é chamada de inverso de $x \in A$, e denotado por x^{-1}. Assim, um **corpo** é um anel unitário e comutativo no qual todo elemento diferente de zero tem inverso.

No exemplo abaixo destacamos o axioma de **corpo**, que são satisfeitos pelo conjunto $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.1. O conjunto dos números reais munido das operações usuais de adição e multiplicação ($\mathbb{R}$, +, .) é um corpo. De fato, sabemos que em $\mathbb{R}$ valem os axiomas seguintes.

A_1 (Associatividade da soma): Dados quaisquer $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$

$$(x+y)+z = x+(y+z).$$

A_2 (Comutatividade da soma): Dados quaisquer $x,\ y \in \mathbb{R}$

$$x+y=y+x.$$

A_3 (Existência do elemento neutro para soma): Existe um elemento em $\mathbb{R}$, chamado "zero" ou "elemento neutro", indicado pelo símbolo "0" tal que.

$$x+0=0+x=x, \quad \text{para qualquer } x \in \mathbb{R}.$$

A_4 (existência do elemento oposto para soma): Todo elemento $x \in \mathbb{R}$ corresponde um elemento $x' \in \mathbb{R}$ indicado por $-x$, tal que,

$$x + x' = x' + x = 0 \quad \text{ou}$$

$$x+(-x)=(-x)+x=0.$$

A_5 (Associatividade do produto): Dados quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$ temos

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

A_6 (Comutatividade do produto): Dados quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ temos, $x \cdot y = y \cdot x$

A_7 (Distributividade da multiplicação em relação à adição): Quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$, temos:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

A_8 (Existência do elemento unidade do produto): Dados $x \in \mathbb{R}$, existe um elemento em $\mathbb{R}$, designado "elemento unidade" e indicado com o símbolo "1", tal que

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

A_9 (Existência do elemento inverso): Para todo elemento $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$, corresponde um elemento y' ou $1/y$, tal que:

$$y \cdot y' = y' \cdot y = 1.$$

Portanto, o sistema algébrico ($\mathbb{R}$, +, .) é um corpo.

Sejam $(A, *, \Delta)$ e (B, $\oplus$, $\odot$) anéis. No conjunto A x B definimos as operações de adição (+) e multiplicação ($\cdot$) por

$$(a, b) + (c, d) = (a * c, b \oplus d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \Delta c, b \odot d),$$

para quaisquer $(a, b), (c, d) \in$ A x B.

A próxima proposição mostra que (A x B, +, .) é uma anel. Chamamos este anel de **anel produto direto**, ou **anel produto cartesiano**, de A e B. A proposição também assegura que o anel A x B será comutativa e terá unidade, quando A e B forem comutativos e tiverem unidade.

Proposição 2.1.1. Sejam $(A,\ *,\ \Delta)$ e (B, ⊕, ⊙) anéis então:

1) (A x B, +, .) é anel.

2) Se A e B têm unidade então A x B têm unidade.

3) Se A e B são comutativos então A x B é comutativo.

Demonstração:

1) Verificamos os axiomas de anel.

Sejam (a, b), (c, d), (e, f) ∈ A x B.

A_1 (Associatividade da soma)

$$((a,b) + (c,d)) + (e,f) = (a,b) + ((c,d) + (e,f))$$
$$\begin{aligned}((a,b) + (c,d)) + (e,f) &= (a*c,\ b\oplus d) + (e,f)\\ &= (a*c*e,\ b\oplus d\oplus f)\\ &= ((a*c)*e, (b\oplus d)\oplus f)\\ &= (a*(c*e), b\oplus(d\oplus f))\\ &= (a,b) + (c*e, d\oplus f) = (a,b) + ((c,d)+(e,f))\end{aligned}$$

A_2 (Comutatividade da soma)

$$(a,b) + (c,d) = (c,d) + (a,b)$$
$$\begin{aligned}(a,b) + (c,d) &= (a*c) + (b\oplus d)\\ &= (c*a,\ d\oplus b)\\ &= (c,d) + (a,b)\end{aligned}$$

A_3 (Elemento neutro)

Sejam O_A e O_B elementos neutros de A e B respectivamente. Então $(O_A,\ O_B) \in A \times B$ e

$(a,b)+(O_A,O_B)=(a*O_A,b\oplus O_B)=(a,b)$

$(O_A,O_B)+(a,b)=(O_A*a,O_B\oplus b)=(a,b)$

Portanto $(O_A\ ,O_B)$ é o elemento neutro de A x B.

A_4 (Elemento simétrico)

Dado $(a,b)\in$ A x B temos $a\in A$ e $b\in B$ como A e B são anéis existem $-a\in A$ e $-\ b\in B$ tais que

$a*(-a)=(-a)*a=O_A$ e $b\oplus(-b)=(-b)\oplus b=O_B$.

Então $(-a,\ \ -b)\in$ A x B e

$(a,\ b)+(-a,-b)=(a*(-a),b\oplus(-b))=(O_A,O_B)$

$(-a,\ \ -b)+(a,b)=((-a)*a,(-b)\oplus b)=(O_A,O_B)$

Portanto, $(-a,\ -b)$ é o elemento simétrico de $(a,\ b)\in$ A x B.

A_5 (Associatividade do Produto)

$(a,\ b)\cdot((c,d)\cdot(e,f))=((a,b).(c,\ d))\cdot(e,\ f)$

Basta usar a associatividade de Δ em A e de $\oplus$ em B.

$$
\begin{aligned}
(a,\ b)\cdot((c,d)\cdot(e,f)) &= (a,b)\cdot(c\Delta e,d\oplus f)\\
&=(a\ \Delta(c\Delta e),\ b\oplus(d\oplus f))\\
&=((a\Delta c)\Delta e,\ (b\oplus d)\oplus f)\\
&=(a\Delta c,b\oplus d)\cdot(e,f)\\
&=((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f)
\end{aligned}
$$

A_6 (Comutatividade do Produto)

$$(a,\ b)\cdot((c,d)+(e,f))=(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)$$

$$\begin{aligned}(a,\ b)\cdot((c,d)+(e,f)) &= (a,b)\cdot(c*e,d\oplus f)\\ &=(a\,\Delta\, c*e, b\odot d\oplus f)\\ &=(a\,\Delta\,(c*e), b\odot(d\oplus f))\\ &=((a\,\Delta\, c)*(a\,\Delta\, e),(b\odot d)\oplus(b\odot f))\\ &=(a\,\Delta\, c,\ b\odot d)+(a\,\Delta\, e,\ b\odot f)\\ &=(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)\end{aligned}$$

$$((a,\ b)+(c,d))\cdot(e,f)=(a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f)$$

$$\begin{aligned}((a,\ b)+(c,d))\cdot(e,f) &= (a*c,b\oplus d)\cdot(e,f)\\ &=(a*c\,\Delta\, e,b\oplus d\odot f)\\ &=(a*(c\,\Delta\, e),b\oplus(d\odot f))\\ &=(a*c)\Delta(a*e),(b\oplus d)\odot(b\oplus f)\\ &=(a*c,b\oplus d)\cdot(a*e,b\oplus f)\\ &=(a,b)+(c,d)\cdot(a,b)+(e,f)\\ &=(a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(a,b)\end{aligned}$$

2) Se A e B têm unidade então $A\text{x}B$ têm unidade.

Demonstração: Sejam 1_A e 1_B os elementos unidades de A e B respectivamente. Então $(1_A,\ 1_B)\in A\text{x}B$ e para todo $(a,b)\in A\ \text{x}\ B$ temos:

$(1_A,\ 1_B)\cdot(a,b)=(1_A\,\Delta\, a,\ 1_B\odot b)=(a,b)=(a\,\Delta\, 1_A, b\odot 1_B)=(a,b)\cdot(1_A,1_B)$ donde se conclui que $(1_A,\ 1_B)$ é a unidade de AxB.

3) Se A e B são comutativos então AxB é comutativo.

Sejam agora $(a,b),\ (c,d)\in A\text{x}B$. Usando a comutatividade da operação Δ em A e da operação $\odot$ em B temos:

$$(a,b)\cdot(c,d)=(a\Delta c, b\odot d)=(c\Delta a,\ d\odot b)=(c,d)\cdot(a,b).$$

■

Pela proposição 2.1.1, concluimos que $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ é anel com as operações:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac,\ bd).$$

No entanto, $\mathbb{R}^2$ não é corpo. Em verdade $\mathbb{R}^2$ sequer é domínio, pois se tomarmos os pares ordenados $(1,0)$ e $(0,1)$ não nulos em $\mathbb{R}^2$, temos que, $(1,0)\cdot(0,1)=(0,\ 0)$.

Portanto, conclui-se que o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ visto como anel produto direto de $\mathbb{R}$ com $\mathbb{R}$ não é corpo.

Vamos tomar as operações usuais de $\mathbb{R}$ para definir novas operações em $\mathbb{R}^2$ de maneira de $\mathbb{R}^2$ seja um corpo. Dados (a,b), $(c,d)\in\mathbb{R}^2$ defina:

I) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

II) $(a,b)\odot(c,d)=(ac-bd,\ ad+bc)$.

Proposição 2.1.2. $(\mathbb{R}^2,+,\odot)$ é corpo.

Demonstração:

A operação + definida em $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ coincide com a adição do anel produto direto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e então os axiomas de anel (A_1), (A_2), (A_3), (A_4) são verificados.

$$
\begin{aligned}
A_5 : (a,\ b)\odot\left((c,d)\odot(e,f)\right) &= \left((a,b)\odot(c,d)\right)\odot(e,f)\\
&= (a,b)\odot(ce-df,\ cf+de)\\
&= \left(a(ce-df)-b(cf+de),\ a(cf+de)+b(ce-df)\right)\\
&= \left(ace-adf-bcf-bde,\ acf+ade+bce-bdf\right)\\
&= \left(ace-bde-adf-bcf,\ acf-bdf+ade+bce\right)\\
&= \left((ac-bd)e-(ad+bc)f,\ (ac-bd)f+(ad+bc)e\right)\\
&= (ac-bd,\ ad+bc)\odot(e,\ f)\\
&= \left((a,b)\odot(c,d)\odot(e,f)\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_6 : (a,\ b)\odot\left((c,d)+(e,f)\right) &= (a,b)\odot(c,d)+(a,b)\odot(e,f)\\
(a,b)\odot\left((c,d)+(e,f)\right) &= (a,b)\odot(c+e,d+f)\\
&= \left(a(c+e)-b(d+f),\ a(d+f)+b(c+e)\right)\\
&= \left(ac+ae-bd-bf,\ ad+af+bc+be\right)\\
&= \left(ac-bd+ae-bf, ad+bc+af+be\right)\\
&= (ac-bd, ad+bc)+(ae-bf,\ af+be)\\
&= (a,b)\odot(c,d)+(a,b)\odot(e,f)
\end{aligned}
$$

De forma análoga, prova-se que:

$$\left((c,d)+(e,f)\odot(a,b)\right)=(c,d)\odot(a,b)+(e,f)\odot(a,b).$$

$$
\begin{aligned}
A_7 : (a,\ b)\odot(c,d) &= (c,d)\odot(a,b)\\
(a,\ b)\odot(c,d) &= (ac-bd,\ ad+bc)\\
&= (ca-db,\ cb+da)\\
&= (c,d)\odot(a,b)
\end{aligned}
$$

$A_8 : \exists\, 1_{\mathbb{R}^2}$ tal que $1_{\mathbb{R}^2}\odot(a,b)=(a,b)\odot 1_{\mathbb{R}^2}=(a,b)$

Tome $1_{\mathbb{R}^2} = (1,0) \in \mathbb{R}^2$. Então

$(1,\ 0) \odot (a,b) = (1a - 0b,\ 1b + 0a) = (a,b)$

Pelo axioma A_7 comutatividade do produto, também temos $(a,\ b) \odot (1,\ 0) = (a,\ b)$.

Logo $(1,\ 0)$ é a unidade de $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$.

A_{10} : Se $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ e $(a,b) \neq (0,\ 0)$ existe $(a,\ b)^{-1} \in \mathbb{R}^2$ tal que

$(a,b) \odot (a,b)^{-1} = (1,0)$

Como $(a,b) \neq (0,0)$ então $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

Segue que $a^2 + b^2 \neq 0$ e como $a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$ temos:

$(a^2 + b^2)^{-1} = \dfrac{1}{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$.

Tome $(a,\ b)^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2} \right) \in \mathbb{R}^2$

$$(a,b) \odot (a+b)^{-1} = (a,b) \odot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

$$= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab}{a^2 + b^2} + \frac{ba}{a^2 + b^2} \right) = (1,\ 0)$$

■

A partir da demonstração de que $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$ é um corpo, denominaremos agora este corpo de $\mathbb{C}$ e chamaremos de **corpo dos números complexos**.

Ao olharmos mais atentamente para o corpo $\mathbb{R}$ percebe-se que R não está contido em $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$; No entanto por meio de um isomorfismo pode-se considerar R como sendo um subcorpo de $\mathbb{C}$.

Definição 2.1.4. Sejam os anéis (A, +, .) e (B, *, Δ). Um **homomorfismo** entre os anéis A e B e uma função $f : A \to B$ tal que:

(i) $f(a+b) = f(a) * f(b), \ \forall \ a, b \in A$

(ii) $f(a \cdot b) = f(a) \Delta \ f(b), \ \forall \ a, b \in A$

Definição 2.1.5. Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de anéis. Dizemos que f é um **isomorfismo** quando f é bijetor.

Definição 2.1.6. Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de anéis; Dizemos que f é um **monomorfismo** quando f é injetor, isto é, $f(x) = f(y)$ implica em $x = y$.

Lema 2.1.1. A aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(a) = (a, 0)$ é monomorfismo de anéis e $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R} \times \{0\}$.

Demonstração:

Pela definição de f sabemos que $\operatorname{Im}(f) = \{(a, 0); a \in \mathbb{R}\}$. Com isto $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R} \times \{0\}$. Note que f é injetora, pois dado α e $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$ temos $(\alpha, 0) \neq (\beta, 0)$.

Aplicaremos a definição 2.1.4 para mostrar que f é um homomorfismo. Sejam α e $\beta \in \mathbb{R}$ então

i) $f(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta, 0) = (\alpha + \beta, 0 + 0) = (\alpha, 0) + (\beta, 0) = f(\alpha) + f(b)$

ii) $f(\alpha \cdot \beta) = (\alpha\beta, 0) = (\alpha\beta - 0 \cdot 0, \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0) = (\alpha, 0) \odot (\beta, 0) = f(\alpha) \odot f(b).$

■

Observação 2.13. Um isomorfismo entre os anéis A e B é representado pelo símbolo $A \simeq B$.

Do exposto no Lema 2.1.1, conclui-se que $\mathbb{R} \simeq \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \times \{0\}$ e que $\mathbb{R} \times \{0\}$ é subanel de $\mathbb{C}$, pois $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$ e existe o fechamento para as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R} \times \{0\}$.

Como a estrutura de corpo é invariante por isomorfismo podemos concluir que $\mathbb{R} \times \{0\}$ é corpo, isto é, $\mathbb{R} \times \{0\}$ é subcorpo de $\mathbb{C}$.

Dessa maneira o homomorfismo nos garante a equivalência $\mathbb{R} = \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \times \{0\}$ ou de uma forma mais condensada temos $a = (a, 0)$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$.

2.2 Operações na forma algébrica

Antes de efetuarmos as operações algébricas de números complexos, precisamos rever os elementos de $\mathbb{C}$ da forma (0, b) com um produto de um número real por um elemento de $\mathbb{C}$.

Sabemos da definição que $(0, b) = (b, 0) \odot (0, 1)$ denotamos $i = (0,1)$ e $(b,\ 0) = b$, portanto escrevemos $(0, b) = bi$.

Definição 2.2.1. O elemento $i = (0,1)$ é chamado de **unidade imaginária**.

Observação 2.2.1 Uma operação simples em $\mathbb{C}$ mostra que $i^2 = -1$. Vejamos

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \odot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

Dado $z = (a,\ b) \in \mathbb{C}$ temos:

$$z = (a,\ b) = (a,\ 0) + (0, b) = a + bi.$$

Portanto o número complexo é representado na forma algébrica por $z = a + bi$. Assim $\mathbb{C} = \{\, a + bi;\ a,\ b \in \mathbb{R} \}$. Dessa forma quando escrevemos $z = a + bi$ o número ***a*** representa a parte real e ***b*** a parte imaginária de $z = a + bi$. Denotamos a parte real de z por $\operatorname{Re}(z) = a$, e a parte imaginária por $\operatorname{Im}(z) = b$.

Observação 2.2.2. $a + bi = c + di \Leftrightarrow (a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$.

Definição 2.2.2. Um número complexo da forma $z = a + bi$ é real quando sua parte imaginaria é zero. E é chamado de **imaginário puro** quando sua parte real é zero.

Exemplo 2.2.1. $z = a + 0i$ é real.

Exemplo 2.2.2. $z = 0 + 2i$ imaginário puro.

Ao efetuarmos as operações algébricas no conjunto $\mathbb{C}$ devemos relembrar que:

- Se $\mathbb{C} = \{a + bi; a,\ b \in \mathbb{R}\}$ então;
- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Além disso, no corpo $\mathbb{C} = \{ a+bi; a,\ b \in \mathbb{R} \}$ temos:

- O elemento neutro é 0
- O simétrico de $a + bi$ é $-a - bi$
- A unidade é 1
- O inverso de $a + bi \neq 0$ é $\dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{bi}{a^2+b^{2'}}$

Exemplos de operações com números complexos escritos na forma $a+bi.$

Exemplo 2.2.3. Calcular o inverso de $z = 2+3i.$

Solução:

$$z^{-1} = \frac{2}{2^2+3^2} - \frac{3i}{2^2+3^2} = \frac{1}{13}(2-3i).$$

Exemplo 2.2.4. Se $\alpha = 7-2i$ e $\beta = 3+i,$ calcular

a) $\alpha+\beta,$

b) $\alpha-3\beta,$

c) $\alpha\beta+\alpha,$

d) $\alpha\beta-\beta\alpha,$

e) $\dfrac{\alpha}{\beta}$

f) $\dfrac{\beta}{\alpha}$

Soluções:

$a)\, \alpha + \beta = (7-2i)+(3+i) = (7+3)+(-2+1)i = 10-i$

$b)\, \alpha - 3\beta = (7-2i)-3(3+i) = (7-2i)+(-9-3i) = (7-9)+(-2-3)i = -2-5i$

$c)\, \alpha\beta + \alpha = \alpha(\beta+1) = (7-2i)(3+i+1) = (7-2i)(4+i) = (28+2)+(7-8)i = 30-i$

$d)\, \alpha\beta - \beta\alpha = \alpha\beta - \alpha\beta = 0$

$e)\, \dfrac{\alpha}{\beta} = \alpha\beta^{-1} = (7-2i)\left(\dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{10}\right) = \dfrac{1}{10}(7-2i)(3-i) = \dfrac{1}{10}((21-2)+(-7-6)i) = \dfrac{1}{10}(19-13i)$

$f)\, \dfrac{\beta}{\alpha} = \beta\alpha^{-1} = (3+i)\left(\dfrac{7}{53} + \dfrac{2}{53}i\right) = \dfrac{1}{53}(3+i)(7+2i) = \dfrac{1}{53}(21+2)+(6+7)i = \dfrac{1}{53}(23+13i)$

Exemplo 2.2.5. Determinar $y \in \mathbb{R}$ para que $z = (2-yi)(y+2i)$ seja imaginário puro. $z = (2-yi)(y+2i) = (2y+2y)+(4-y^2)i = 4y+(4-y^2)i$ para ser imaginário puro sua parte real é zero, ou seja, $\mathrm{Re}(z) = 0 = 4y$. Logo se conclui que $y = 0$.

O corpo ($\mathbb{C}$, +, .) pode ser identificado via isomorfismo com um corpo formado por matrizes 2 x 2.

Proposição 2.2.1. A aplicação $f : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$

$a+bi \to \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, é monomorfismo de anéis e $\mathrm{Im}(f) = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix};\ a,b \in \mathbb{R}\right\}$.

Demonstração:

É claro que $\operatorname{Im}(f)=\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix};\, a,b\in\mathbb{R}\right\}$ para mostrar que f é injetora fazemos:

$$\begin{aligned} f(a+bi)=f(c+di) &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow a=c \;\text{ e }\; b=d \\ &\Rightarrow a+bi=c+di \end{aligned}$$

Agora vamos ver que f é homomorfismo:

- $$\begin{aligned} f\big((a+bi)+(c+di)\big) &= f\big((a+c)+(b+d)i\big) \\ &= \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= f(a+bi)+f(c+di) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f\big((a+bi)\cdot(c+di)\big) &= f\big((ac-bd)+(ad+bc)i\big) \\ &= \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= f(a+bi)\,f(c+di) \end{aligned}$$

■

2.3 Norma e conjugado

Definição: 2.3.1. Chama-se **conjugado** de um número complexo $z = a + bi$ ao número complexo $\bar{z} = a - bi$.

Portanto, o conjugado de um número real é ele próprio, e o conjugado de um número imaginário puro é seu simétrico, isto é, para $a,\ b \in \mathbb{R}$ temos:

$z = a \Rightarrow \bar{z} = a$

$z = bi \Rightarrow \bar{z} = -bi$

Observe que se z é representado pelo par ordenado $z = (a,\ b)$, então $\bar{z} = (a,\ -b)$. No plano cartesiano $\bar{z}$ é uma reflexão pelo eixo horizontal, como mostra a figura

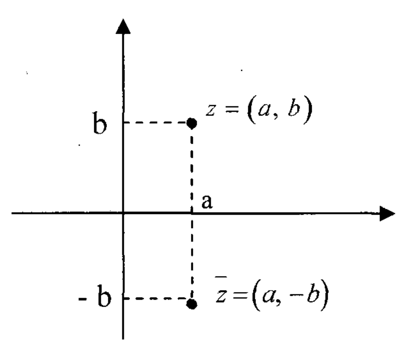


Fig: 2.3.1

Exemplo 2.3.1. Determinar o conjugado dos números complexos.

Solução:

a) $z = (2 + 3i)$ — a) $\bar{z} = (2 - 3i)$

b) $z = 4i$ — b) $\bar{z} = -4i$

c) $z = 7$ — c) $\bar{z} = 7$

d) $z = 4 - 5i$ d) $\bar{z} = 4 + 5i$

Definição 2.3.2. A **norma** do número complexo $z = a + bi$ é $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Também conhecida como módulo ou valor absoluto.

Exemplo 2.3.2. Se $z = 2 + 3i$ então $|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ e se $z = 3$ então $|z| = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$.

Lema 2.3.1. Aplicação $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$, é um isomorfismo.

Demonstração:

Sejam $\alpha = a + bi,\quad \beta = c + di \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha+\beta) &= f\big((a+c)+(b+d)i\big) \\ &= (a+c)-(b+d)i \\ &= (a-bi)+(c-di) \\ &= f(\alpha)+f(\beta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha\beta) &= f\big((ac-bd)+(ad+bc)\,i\big) \\ &= (ac-bd)-(ad+bc)i \\ &= (a-bi)(c-di) \\ &= f(\alpha)f(\beta). \end{aligned}$$

Segue que f é homomorfismo.

Para verificar que é sobrejetora, considere

$z = a + bi \in \mathbb{C}$ e tome $w = a - bi \in \mathbb{C}$. Então $f(w) = \overline{w} = \overline{a - bi} = a + bi = z$.

Finalizando f é injetor, pois

$f(a+bi) = f(c+di) \Rightarrow a - bi = c - di \Rightarrow$

$\Rightarrow a = c$ e $b = d \Rightarrow a + bi = c + di.$

■

A aplicação $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \overline{z}$ é um isomorfismo, como já foi provado no Lema 2.3.1. Então vamos provar as propriedades dos conjugados. Se a e b são dois números complexos quaisquer então temos:

i) $\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}$

ii) $\overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b}$

iii) $\overline{\overline{a}} = a$

iv) $\overline{a - b} = \overline{a} - \overline{b}$

v) $\overline{\left(\dfrac{a}{b}\right)} = \dfrac{\overline{a}}{\overline{\beta}}, \ \beta \neq 0$

vi) $a + \overline{a} = 2\operatorname{Re}(a)$

vii) $a - \overline{a} = 2\operatorname{Im}(a)i$

viii) $\overline{a} = a$ se e somente se a é real

Agora vamos demonstrar as propriedades acima.

Demonstração:

Sejam $a, b \in \mathbb{C}$ então

i) $\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}$

$$\overline{a+b} = f(a+b) = f(a) + f(b) = \overline{a} + \overline{b}$$

ii) $\overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b}$

$$\overline{ab} = f(ab) = f(a)f(b) = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

iii) $\overline{\overline{a}} = a$

$$\overline{\overline{a}} = f(\overline{a}) = a$$

iv) $\overline{a - b} = \overline{a} - \overline{b}$

$$\overline{a-b} = f(a-b) = f(a) - f(b) = \overline{a} - \overline{b}$$

v) $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \overline{a \cdot b^{-1}} = f\left(ab^{-1}\right) = f(a) \cdot f\left(b^{-1}\right) = f(a) \cdot f(b)^{-1} = \overline{a}\left(\overline{b}\right)^{-1} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$

vi) Seja $a = x + yi$, então:

$$a + \overline{a} = (x + yi) + (x - yi) = (x + x) + (y - y)i = 2x = 2\operatorname{Re}(a)$$

vii) $a - \overline{a} = (x + yi) - (x - yi) = (x - x) + (y + y)i = 2yi = 2\operatorname{Im}(a)i$

viii) Seja $a = x + yi$

$\overline{a} = a \Leftrightarrow x + yi = x - yi \Leftrightarrow y = -y \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow a$ é real.

■

Exemplo 2.3.3. Seja $\beta = 3 + 2i$ escreva $\alpha = \overline{\overline{\beta} - 4i}$ na forma $a+bi$.

$$\alpha = \overline{\overline{\beta} - 4i} = \overline{\overline{\beta}} - \overline{4i} = \beta + 4i = 3 + 2i + 4i = 3 + 6i.$$

Exemplo 2.3.4. Escreva $\alpha = \dfrac{\overline{(3+i)^2}}{4-3i}$ na forma $a+bi$.

$$\alpha = \frac{\overline{(3+i)^2}}{4-3i} = (3-i)(3-i)(4-3i)^{-1} = (8-6i)(4-3i)^{-1} = \frac{8-6i}{4-3i} = 2.$$

Exemplo 2.3.5. Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ mostre que $\alpha \cdot \overline{\alpha} \in \mathbb{R}$.

Solução: Seja $\alpha = a + bi$.

$$\alpha\cdot\bar{\alpha}=(a+bi)(a-bi)=(a^2+b^2)+(-ab+ba)i=(a^2+b^2).$$

Exemplo 2.3.6. Determine $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha 2i+\bar{\alpha}=-8+5i.$

Solução: Seja $\alpha = a+bi$ então

$$\begin{aligned}-8+5i &= 2i(a+bi)+(a-bi)\\ &=(2ai-2b)+(a-bi)\\ &=2ai-2b+a-bi\\ &=(a-2b)+(2a-b)i\end{aligned}$$

$$\begin{cases}a-2b=-8 & (-2)\\ 2a-b=5\end{cases} \qquad \begin{cases}-2a+4b=16\\ 2a-b=5\end{cases}$$

$$3b=21 \Rightarrow b=7$$

$$\begin{aligned}&a-2(7)=-8\\ &a=-8+14\\ &a=6\end{aligned}$$

Logo $\alpha=6-7i.$

Representação geométrica da norma e do conjugado

Observe que se z é representado como par ordenado $z=(a,\ b)$ então $|z|$ é exatamente a distância de $(a,\ b)$ até a origem $(0,\ 0)$.

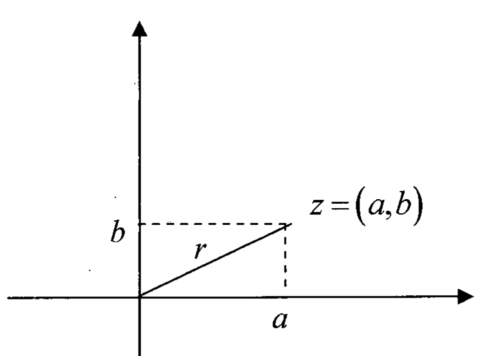
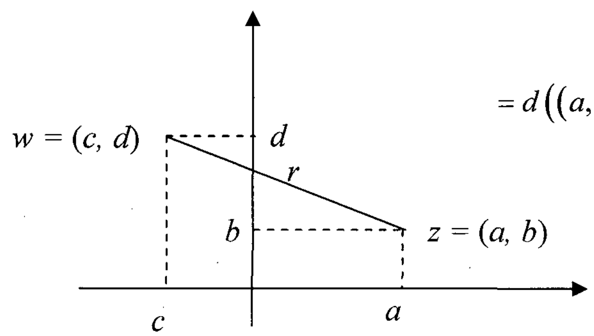


Fig. 2.3.2

$$r=d\left((a,b),(0,0)\right)=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=|z|.$$

De modo geral, se $z = (a,\ b)$ e $w = (c,\ d)$ são números complexos então $|z-w|$ é a distância de $(a,\ b)$ até $(c,\ d)$.



$$= d((a,b),(c,d)) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = |z-w|$$

Fig. 2.3.3

Exemplo 2.3.7. $z = -5 \Rightarrow |z| = \sqrt{(-5)^2} = 5$

$$z = 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{(3)^2} = 3$$

$$z = 4 + 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

A cada número complexo $z = a + bi$ associamos três números reais $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\mathrm{Re}(z) = a$ e $\mathrm{Im}(z) = b$. Estes números estão relacionados pela equação: $|z|^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$.

Note que:

$|z| \geq |\mathrm{Re}(z)| \geq \mathrm{Re}(z)$ e

$|z| \geq |\mathrm{Im}(z)| \geq \mathrm{Im}(z)$

Se $z = a + bi$ então

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a| = |\mathrm{Re}(z)| \geq a = \mathrm{Re}(z)$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{b^2} = |b| = |\mathrm{Im}(z)| \geq b = \mathrm{Im}(z).$$

Propriedade da norma

Sejam $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ então

1) $\alpha\,\overline{\alpha} = |\alpha|^2$

2) $|\overline{\alpha}| = |\alpha| = |-\alpha|$

3) $\beta^{-1} = \dfrac{\overline{\beta}}{|\beta|^2},\ \beta \neq 0$

4) $|\beta^{-1}| = |\beta|^{-1},\quad \beta \neq 0$

5) $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$

6) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|},\ \beta \neq 0$

7) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ (desigualdade triangular)

8) $|\alpha - \beta| \geq \big||\alpha| - |\beta|\big|$

Demonstração:

Sejam $\alpha = a + bi$ e $\beta = c + di$.

1) $\alpha\overline{\alpha} = (a+bi)(a-bi) = (a^2 + b^2) + (-ab + ba)i$

$$= a^2 + b^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right) = |\alpha|^2.$$

2) $|\overline{\alpha}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha|$ e

$$|-\alpha| = |-a - bi| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha|.$$

3) $\beta^{-1} = \dfrac{c-di}{c^2+d^2} = \dfrac{\overline{\beta}}{|\beta|^2}.$

4) $\left|\beta^{-1}\right| = \left|\dfrac{c-di}{c^2+d^2}\right| = \left|\dfrac{c}{c^2+d^2} - \left(\dfrac{d}{c^2+d^2}\right)i\right|$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{\left(c^2+d^2\right)^2} + \frac{d}{\left(c^2+d^2\right)^2}} = \sqrt{\frac{c^2+d^2}{\left(c^2+d^2\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{c^2+d^2}} = \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}} = \left(\sqrt{c^2+d^2}\right)^{-1} = |\beta|^{-1}.$$

5) $|\alpha\beta|^2 = \alpha\beta\overline{\alpha\beta} = \alpha\beta\overline{\alpha}\,\overline{\beta} = \alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta} = |\alpha|^2\,|\beta|^2.$

Desde que $|\alpha\beta|$, $|\alpha|$ e $|\beta|$ são números reais positivos, extraindo raiz quadrada na igualdade $|\alpha\beta|^2 = |\alpha|^2\ \ |\beta|^2 = \left(|\alpha||\beta|\right)^2$, vem que $|\alpha\beta| = |\alpha|\ |\beta|$.

6) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \left|\alpha\cdot\beta^{-1}\right| = |\alpha|\left|\beta^{-1}\right| = |\alpha||\beta|^{-1} = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}.$

7) $|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta)\left(\overline{\alpha+\beta}\right)$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha+\beta)\left(\overline{\alpha}+\overline{\beta}\right)\\
&= \alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \beta\overline{\beta}\\
&= |\alpha|^2 + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha\overline{\beta}} + |\beta|^2\\
&= |\alpha|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\alpha\overline{\beta}\right) + |\beta|^2\\
&\leq |\alpha|^2 + 2\left|\alpha\overline{\beta}\right| + |\beta|^2\\
&= |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2\\
&= \left(|\alpha| + |\beta|\right)^2.
\end{aligned}$$

Desde que $|\alpha+\beta|$ e $|\alpha|+|\beta|$ são números reais positivos, tomando raiz quadrada na desigualdade $|\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha|+|\beta|)^2$, vem que $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$.

8) $|\alpha| = |\alpha-\beta+\beta| \leq |\alpha-\beta|+|\beta| \Rightarrow |\alpha-\beta| \geq |\alpha|-|\beta|$

$|\beta| = |\beta-\alpha+\alpha| \leq |\beta-\alpha|+|\alpha| = |\alpha-\beta|+|\alpha| \Rightarrow |\alpha-\beta| \geq |\beta|-|\alpha| =$
$= -(|\alpha|-|\beta|)$.

Como $|\alpha|-|\beta|$ é um número real, temos que

$|\alpha-\beta| \geq \max\{|\alpha|-|\beta|, -(|\alpha|-|\beta|)\} = ||\alpha|-|\beta||$.

■

Exemplo 2.3.8. Sabendo que $|\alpha| = \sqrt{34}$ e $\beta = 4+\mathrm{i}$ calcule $\alpha\overline{\alpha}$ e $|\alpha\beta^{-1}|$.

Solução

$$\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2 = \left(\sqrt{34}\right)^2 = 34$$

$$|\alpha\beta^{-1}| = |\alpha||\beta|^{-1} = \sqrt{34}\left(\sqrt{17}\right)^{-1} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{17}} = \sqrt{2}.$$

Capítulo 3

Potências, raízes e regiões do plano complexo

3.1 Potência

Seja $z = a + bi$ um número complexo não nulo. O segmento que liga a origem $(0,0)$ até (a,b) tem comprimento $|z|$. Se θ é o ângulo entre este segmento e o eixo positivo OX temos.

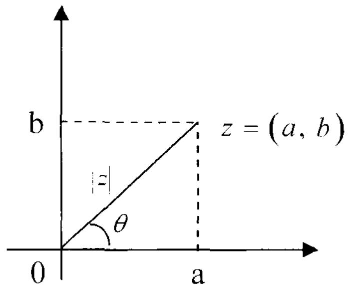


Fig. 2.3.4

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z|\cos\theta$$

$$sen\,\theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z|\,sen\,\theta$$

Assim podemos escrever $z = |z|(\cos\theta + i\,sen\,\theta),\ 0 \le \theta < 2\pi$.

Definição 3.1.1. Dizemos que o número complexo não nulo $z = |z|(\cos\theta + i sen\theta), 0 \le \theta \le 2\pi$ está na **forma trigonométrica** (ou forma polar) e que θ é o **argumento** de z.

Costuma-se denotar o argumento de z por arg(z).

Note que $tg\,\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \theta = \arg(z) = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$.

A representação trigonométrica de $z = 0$ pode ser representada de mais de uma maneira. Por exemplo $0=|0|\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\,sen\frac{\pi}{2}\right);0=|0|(\cos\pi+i\,sen\pi)$.

Exemplo 3.1.1. Represente na forma trigonométrica os números complexos.

a) $z=\sqrt{3}-i$ b) $z=-3i$ c) $z=7$ d) $z=\frac{1+i}{1-i}$ e) $z=1+\sqrt{3i}$

a) $z=\sqrt{3}-i$

$$|z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=2 \quad \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad sen\theta=\frac{-1}{2}$$

logo $\theta=\frac{11\pi}{6}$

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+isen\frac{11\pi}{6}\right).$$

b) $z=-3i$

$$|z|=\sqrt{0^2+(-3)^2}=\sqrt{3^2}=3 \quad \cos\theta=\frac{0}{|z|}=0 \quad \text{e} \quad sen\theta=\frac{-3}{3}=-1$$

$$\theta=\frac{3\pi}{2}$$

$$-3i=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+isen\frac{3\pi}{2}\right).$$

c) $z=7$

$$|z|=\sqrt{7^2+0^2}=7 \quad \cos\theta=\frac{7}{7}=1 \quad \text{e} \quad sen\theta=\frac{0}{7}=0$$

$$\theta=0$$

$$7=7(\cos 0+isen\,0).$$

d) $z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i+i+i^2}{1+i-i-i^2}=\frac{1+2i-1}{1-(-1)}=\frac{2i}{2}=i$

$$|z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$$

$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{0}{1} = 0$ e $sen\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{1}{1} = 1$ então;

θ é o arco cujo $\cos\theta = 0$ e sen$\theta = 1$. Portanto

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Logo $\dfrac{1+i}{1-i} = i = 1\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + isen\dfrac{\pi}{2}\right)$.

e) $z = 1 + \sqrt{3}i$

$$|z| = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{2}$ e $sen\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ então;

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Portanto $1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + isen\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Proposição 3.1.1. Chamada (Fórmula de Moivre)

Se $z = |z|(\cos\theta + isen\theta) \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$ então $z^n = |z|^n(\cos n\theta + isen\, n\theta)$.

Demonstração:

Por indução sobre *n*.

Para *n* = *0* é válido, pois $z^0 = 1 = |z|^0(\cos 0.\theta + isen0.\theta)$.

Admita como hipótese de indução que a fórmula vale para *n* = *k,* isto é $z^k = |z|^k(\cos k\theta + i\, senk\theta)$. Para *n* = *k* + *1,* usamos a hipótese de indução e obtemos:

$$z^{k+1} = z^k.z = |z|^k(\cos k\theta + isenk\theta)|z|(\cos\theta + isen\theta)$$
$$= z^{k+1}\left((\cos k\theta\cos\theta - senk\theta\, sen\theta) + (\cos k\theta\, sen\theta + senk\theta\cos\theta)i\right)$$

Lembrar que $sen(u+v) = sen\,u\cos v + sen\,v\cos u$

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - senusenv, \quad \forall \quad u,v \in \mathbb{R}.$$

Vem que $z^{k+1} = |z|^{k+1}\left(\cos(k+1)\theta + isen(k+1)\theta\right)$.

Logo é valido para k + *1*, e pelo princípio da indução $z^n = |z|^n\left(\cos n\theta + isen\theta\right), \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$.

■

Exemplo 3.1.2. Calcule $\left(1+\sqrt{3}i\right)^5$ e $\left(1+\sqrt{3}i\right)^6$.

$z = 1+\sqrt{3}i;\ |z| = 2\ \ \cos\theta = \frac{1}{2}$ e $sen\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ logo

$\theta = \frac{\pi}{3}$, então: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}\right)$.

Pela fórmula de Moivre

$$z^5 = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + isen\frac{5\pi}{3}\right) = 2^5\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ e}$$

$$z^6 = 2^6\left(\cos\frac{6\pi}{3} + isen\frac{6\pi}{3}\right) = 2^6\left(\cos 2\pi + isen2\pi\right) = 2^6\left(1+0\right) = 2^6.$$

Exemplo 3.1.3. Calcule $\left(\sqrt{3}-i\right)^{10}$.

Vimos no exemplo 3.1.1 a) que:

$z = \sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + isen\frac{11\pi}{6}\right)$. Pela fórmula de Moivre temos:

$\left(\sqrt{3}-i\right)^{10} = 2^{10}\left(\cos\left(10.\frac{11\pi}{6}\right)+isen\left(10.\frac{11\pi}{6}\right)\right)$ como o argumento de z deve estar no $[0,\ 2\pi)$, devemos descontar os múltiplos de 2π do ângulo $\frac{110\pi}{6}$ ou seja $\frac{110\pi}{6}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$. Portanto concluímos que: $\left(\sqrt{3}-i\right)^{10}=2^{10}\left(\cos\frac{\pi}{3}+isen\frac{\pi}{3}\right)=$

$=2^{10}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exemplo 3.1.4. Calcule $\frac{(1+i)^8}{(1-i)^6}$.

Já vimos que $\frac{1+i}{1-i}=i$.

Então $\frac{(1+i)^8}{(1-i)^6}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^6.(1+i)^2=i^2(1+i)^2=-2i.$

Exemplo 3.1.5. Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}^*$, para que $\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^n$ seja:

a) Um número real

b) Um número imaginário puro

$z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i;\ |z|=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2;\ \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $sen\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Logo $\theta=\frac{\pi}{4}$ e $z=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+isen\frac{\pi}{4}\right)$. Portanto $z^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+isen\frac{n\pi}{4}\right)$.

a) Para que z^n seja real precisamos de $sen\frac{n\pi}{4}=0$. Isso ocorre quando

$\frac{n\pi}{4}=0+k\pi$.

Se tomamos $k = 0$ vem que $\frac{n\pi}{4} = 0$ e daí $n = 0$, que não é possível, pois $n \in \mathbb{N}^*$.

Segue que $k = 1$ e então $\frac{n\pi}{4} = \pi$, isto é $n = 4$.

Assim, $z^4 = 2^4(\cos\pi + isen\pi) = -16$.

b) Para que z^n seja imaginário puro devemos ter $\cos\frac{n\pi}{4} = 0$. Isso ocorre quando $\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Tomando $k = 0$ vem que $\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, isto é $n = 2$. Então $z^2 = 2^2\left(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right) = 4i$.

Exemplo 3.1.6. Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}^*$ para que $(1+i)^n$ seja:

a) Um número real

b) Um número imaginário puro.

Solução

$z = 1 + i$; $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $sen\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Logo $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right)$

Portanto $z^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + isen\frac{n\pi}{4}\right)$.

a) Para que z^n seja real precisamos ter $sen\frac{n\pi}{4} = 0$ e ocorre quando $\frac{n\pi}{4} = 0 + k\pi$.

Se tomamos $k = 0$ temos que $\frac{n\pi}{4} = 0$ e conclui-se que $n = 0$, o que não é possível, pois $n \in \mathbb{N}^*$. Para $k = 1$ obtemos que $\frac{n\pi}{4} = \pi$ logo $n = 4$ e

$$z^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 \left(\cos \pi + isen\pi\right)$$
$$z^4 = 4\left(\cos \pi + isen\,\pi\right) = -4i$$

b) Para que z^n seja imaginário puro devemos ter $\cos\frac{n\pi}{4} = 0$ isso ocorre quando $\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ isto é $n = 2$.

Então

$$z^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \left(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right)$$
$$z^2 = 2i.$$

3.2 Cálculo da raiz n-ésima complexa de $z \in \mathbb{C}$.

Para encontramos a raiz n-ésima complexa de $z \in \mathbb{C}$ usaremos a seguinte proposição, cuja demonstração pode ser vista em (Janesch, 2008).

Proposição 3.2.1. (Segunda Fórmula de Moivre). Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $z = |z|\left(\cos\theta + isen\theta\right) \in \mathbb{C}^*$. Existem exatamente n raízes n-ésima complexas de z dadas por:

$$M_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right),\ k = 0, 1, ..., n-1$$

■

Exemplo 3.2.1. Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ calcular as raízes quadradas complexas de a.

Como $a > 0$, escrevemos $a = |a|(\cos 0 + isen0)$, e então

$$W_0 = \sqrt{|a|}\left(\cos\left(\frac{0+0}{2}\right) + isen\left(\frac{0+0}{2}\right)\right) = \sqrt{a} \quad \text{e}$$

$$W_1 = \sqrt{|a|}\left(\cos\left(\frac{0+2\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{0+2\pi}{2}\right)\right) = -\sqrt{a}.$$

Exemplo 3.2.2. Seja $a \in \mathbb{R}, a < 0$. Calcular as raízes quadradas complexas de a.

Como $a < 0$, escrevemos $a = |a|(\cos \pi + isen\pi)$, e então:

$$W_0 = \sqrt{|a|}\left(\cos\left(\frac{\pi+0}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi+0}{2}\right)\right) = \sqrt{|a|}i$$

$$W_1 = \sqrt{|a|}\left(\cos\left(\frac{\pi+2\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi+2\pi}{2}\right)\right) = -\sqrt{|a|}i.$$

Notação: se $a \in \mathbb{R}$ e $a < 0$ escrevemos $\sqrt{a} = \sqrt{|a|}i$ esta notação nos diz que:

$\sqrt{-4} = \sqrt{4}i = 2i$

$\sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

$\sqrt{-36} = 6i$

$\sqrt{-1} = i.$

Note que todas as raízes n-ésima complexas M_k, $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, do número complexo z tem o mesmo módulo.

$$M_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)\right), \text{ e}$$

$$|M_k| = \sqrt{\left(\sqrt[n]{|z|}\right)^2\left(\cos^2\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + sen^2\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)} = \sqrt{\left(\sqrt[n]{z}\right)^2} = \sqrt[n]{|z|}.$$

Portanto as raízes n-ésimas complexas M_k podem ser representadas geometricamente sobre a circunferência com centro na origem e raio $\sqrt[n]{|z|}$. Além disso como os possíveis argumentos para M_k que são $\frac{\theta}{n}, \frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}, \frac{\theta}{n}+\frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{\theta}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}$, a circunferência fica dividida em n partes congruentes.

Exemplo: 3.2.3. Calcular as raízes cúbicas complexas de −8 e representar graficamente.

$$z = -8 = 8(\cos\pi + isen\pi)$$

$$\frac{\theta}{n} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ \text{ e } \frac{2k\pi}{n} = k.120^\circ$$

$$\arg(M_0) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$\arg(M_1) = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ = \pi$$

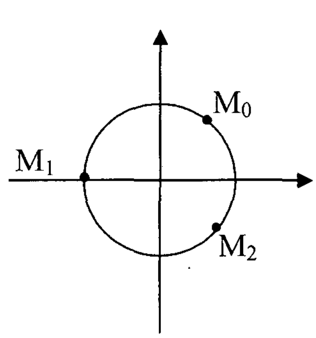
$$\arg(M_2) = 60^\circ + 240^\circ = 300^\circ = \frac{5\pi}{3}$$

$$M_0 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$M_1 = \sqrt[3]{8}(\cos\pi + isen\pi) = -2$$

$$M_2 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + isen\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}i.$$

Representação gráfica



Exemplo: 3.2.4. Calcular as raízes quartas complexas de $z=-8+8\sqrt{3}i$ e representar graficamente.

$|z|=\sqrt{64+64.3}=\sqrt{64.4}=16$; $\cos\theta=\dfrac{-8}{16}=-\dfrac{1}{2}$ e

$sen\theta=\dfrac{8\sqrt{3}}{16}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Logo

$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$ e $z=|z|\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+isen\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$\dfrac{\theta}{n}=\dfrac{2\pi}{3.4}=30^\circ$ e $\dfrac{2k\pi}{n}=k.90^\circ$

$\arg(M_0)=30^\circ=\dfrac{\pi}{6}$

$\arg(M_1)=30^\circ+90^\circ=120^\circ=\dfrac{2\pi}{3}$

$\arg(M_2)=30^\circ+180^\circ=210^\circ=\dfrac{7\pi}{6}$

$\arg(M_3)=30^\circ+270^\circ=300^\circ=\dfrac{5\pi}{3}$

$$M_0=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi}{6}+isen\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+isen\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}+i$$

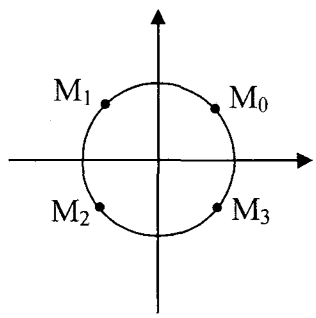
$$M_1=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+isen\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1+\sqrt{3}i$$

$$M_2=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+isen\frac{7\pi}{6}\right)+2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}-i$$

$$M_3=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+isen\frac{5\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1-\sqrt{3}i.$$

Representação gráfica de $z=-8+8\sqrt{3}i$



Exemplo 3.2.5. Calcular as raízes quartas complexas de $z=-4$ e represente graficamente

$|z|=\sqrt{(-4)^2}=4$; $\cos\theta=\frac{-4}{4}=-1$ e $\text{sen}\theta=\frac{0}{4}=0$. Logo $\theta=\pi$ e

$z=4(\cos\pi+isen\pi)$; $\frac{\theta}{n}=\frac{\pi}{4}=45°$ e $\frac{2k\pi}{n}=k.90°$

$\arg(M_0)=\frac{\pi}{4}=45°$

$\arg(M_1)=45°+90°=135°=\frac{3\pi}{4}$

$\arg(M_2)=45°+180°=\frac{5\pi}{4}$

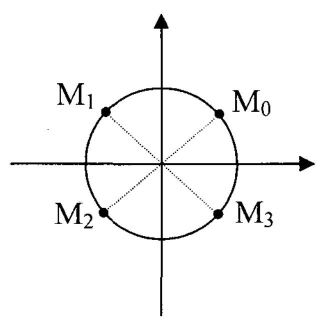
$\arg(M_3)=45°+270°=\frac{7\pi}{4}$

$$M_0=\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi}{4}+isen\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+isen\frac{\pi}{4}\right)=1+i$$

$$M_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + isen\frac{3\pi}{4}\right) = -1 + i$$
$$M_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + isen\frac{5\pi}{4}\right) = -1 - i$$
$$M_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + isen\frac{7\pi}{4}\right) = 1 - i.$$

Representação gráfica de $z = -4$



Exemplo: 3.2.6. Determinar as raízes da equação $x^3 + 2i = 0$

Solução: O problema equivale a determinar as raízes cúbicas do complexo $z = -2i$.

$|z| = \sqrt{(-2)^2} = 2; \cos\theta = \frac{0}{2} = 0$ e sen$\theta = \frac{-2}{2} = -1$. Logo

$\theta = \frac{3\pi}{2}$ e $z = |z|\left(\cos\frac{3\pi}{2} + isen\frac{3\pi}{2}\right)$

$\frac{\theta}{3} = \frac{3\pi}{2.3} = \frac{\pi}{2} = 90°$ e $\frac{2k\pi}{n} = k.120$

$\arg(M_0) = \frac{\pi}{2} = 90°$

$\arg(M_1) = 90° + 120° = 210°$

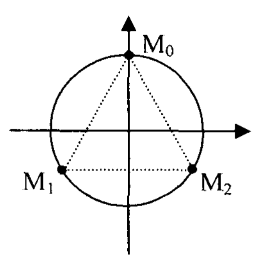
$\arg(M_2) = 90° + 240° = 330°$

$M_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos 90° + isen90°\right) = i\sqrt[3]{2}$

$M_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos 210° + isen210°\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$

$M_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos 330° + isen330°\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right).$

Representação gráfica



Definição 3.2.2. Seja $n \in \mathbb{N}^*$. As soluções da equação $x^n = 1$ em $\mathbb{C}$ são chamadas **raízes n-ésimas complexas da unidade.**

Desde que $1 = |1|\left(\cos 0 + isen0\right)$, a segunda fórmula de Moivre assegura que as raízes n-ésima complexa da unidade são: $\cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Escrevendo $w = \cos\frac{2\pi}{n} + isen\frac{2\pi}{n}$ e usando a primeira fórmula de Moivre para calcular potencias de w, temos que as raízes n-ésimas complexas da unidade são $w^0 = 1$, w^1, $w^2, \ldots, w^{n-1}$.

Dizemos que w^k é raiz n-ésima complexa **primitiva** da unidade quando $mdc(n,k) = 1$, no entanto a importância de uma raiz primitiva está no fato de podermos obter todas as demais a partir de potencias da primitiva.

Exemplo 3.2.7. Determinar as raízes sextas complexas da unidade, identificar as primitivas e representar graficamente. Verificar que fixada uma primitiva, as demais podem ser obtida como potência desta primitiva.

As raízes são $1, w, w^2, \ldots, w^5$ para $w = \cos\frac{2\pi}{6} + isen\frac{2\pi}{6}$

$$w = \cos 60° + isen 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

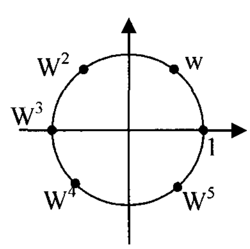
$$w^2 = \cos 120° + isen 120° = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w^3 = \cos 180° + isen 180° = -1$$

$$w^4 = \cos 240° + isen 240° = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w^5 = \cos 300° + isen 300° = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

As primitivas são: w e w^5



Para a raiz primitiva w obtemos as demais fazendo $w^0, w^1, w^2, \ldots, w^5$

Fixando a raiz primitiva w^5. É fácil observar que

$w^6 = \cos\frac{2\pi 6}{6} + isen\frac{2\pi 6}{6} = \cos 2\pi + isen2\pi = 1$. Logo

$\left(w^5\right)^0 = 1$

$\left(w^5\right)^1 = w^5$

$\left(w^5\right)^2 = w^{10} = w^6.w^4 = 1w^4 = w^4$

$\left(w^5\right)^3 = w^{15} = \left(w^6\right)^2.w^3 = 1w^3 = w^3$

$\left(w^5\right)^4 = w^{20} = \left(w^6\right)^3.w^2 = 1w^2 = w^2$

$\left(w^5\right)^5 = w^{25} = \left(w^6\right)^4.w = 1w = w.$

Portanto todas as raízes sextas da unidade podem ser obtidas como potência de cada raiz primitiva

As raízes n-ésimas complexas da unidade podem ser usadas para determinar as raízes n-ésimas complexas de $z \in \mathbb{C}^*$, quando conhecemos $u \in \mathbb{C}$ tal que $u^n = z$.

Lema 3.2.1. Sejam $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}^*$, e u uma raiz n-ésima complexa de z. Se $w \neq 1$ e w é raiz n-ésimas complexa da unidade então as raízes n-ésimas complexas de z são $u, uw, uw^2, ..., uw^{n-1}$.

Demonstração:

Para cada $k \in \{0,1,...,n-1\}$ temos $\left(uw^k\right)^m = u^n\left(w^n\right)^k = z \cdot 1^k = z$

Assim, $u, uw, uw^2, ..., uw^{n-1}$ são raízes n-ésimas complexas de z. Além disso, essas raízes são distintas pois $uw^i = uw^j \Rightarrow w^i = w^j$.

Seja $i \neq j$ assuma sem perda de generalidade, que $i > j$. Segue que $w^{i-j} = 1$. Como $w \neq 1$ temos $i - j = 0$, isto é, $i = j$. Absurdo. Assim, para $i \neq j$ temos $uw^i \neq uw^j$

Como existem exatamente n raízes n-ésimas complexas de z, concluímos que $u, uw, uw^2, \ldots, uw^{n-1}$ são estas raízes.

■

Exemplo: 3.2.8. Determinar as raízes quartas complexas de $z=-8+8\sqrt{3}i$. Admitindo que sabemos que $u=-1+\sqrt{3}i$ é uma destas raízes.

Primeiro calculamos as raízes quartas complexas da unidade. Como $w=\cos\frac{2\pi}{4}+isen\frac{2\pi}{4}=i$ então as raízes complexas da unidade são $1, w=i,\ w^2=-1,\ w^3=-1$. Pelo lema, as raízes quartas complexas de $z=-8+8\sqrt{3}i$ são:

$$u=-1+\sqrt{3}i,\ uw=-\sqrt{3}-i, uw^2=1-\sqrt{3}i \text{ e } uw^3=\sqrt{3}+i.$$

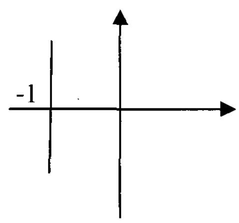
Observe que as raízes n-ésimas complexas de $z \in \mathbb{C}^*$ são as soluções em $\mathbb{C}$, da equação $x^n=z$. Além disso, estas soluções podem ser representadas como n pontos no plano complexo. Em geral, dada uma equação em $\mathbb{C}$ podemos representar sua solução como uma região do plano complexo.

3.3 Regiões do plano complexo

O plano complexo também chamado de plano de Argand-Gauss ou Diagrama de Argand, é um plano cartesiano usado para representar números complexos geometricamente. Nele a parte imaginaria de um número complexo é representado pela ordenada e a parte real pela abscissa.

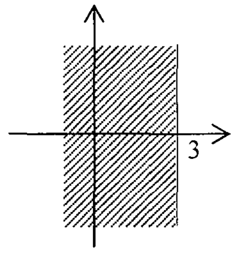
Exemplo 3.3.1 Determinar a região do plano complexo que satisfaz a equação $\mathrm{Re}(z)=-1$;

$S=\{(x,y)\in\mathbb{C};\ x=-1\}=\{(-1,\ y)\in\mathbb{C}\}$



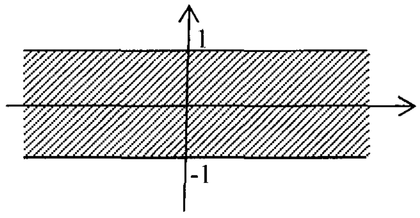
Exemplo 3.3.2. Determinar a região do plano complexo que satisfaz a equação $\operatorname{Re}(z) \leq 3$;

$S = \{(x, y) \in \mathbb{C};\ x \leq 3\}$.



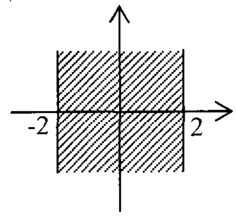
Exemplo 3.3.3 Determinar a região do plano complexo que satisfaz a equação $-1 \leq \operatorname{Im} \leq -1$;

$S = \{(x, y) \in \mathbb{C};\ -1 \leq y \leq 1\}$.

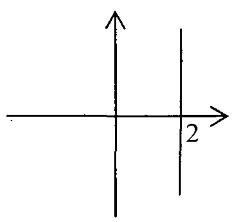


Exemplo 3.3.4. Determinar a região do plano complexo que satisfaz a equação $-2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2$;

$S = \{(x, y) \in \mathbb{C};\ -2 \leq x \leq 2\}$.



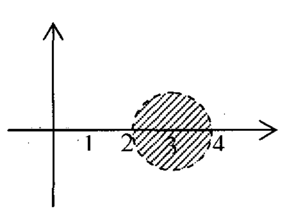
Exemplo 3.3.5. Determine a região do plano complexo que satisfaz a equação $\operatorname{Re}(z) = 2$



Exemplo 3.3.6. Determine a região do plano complexo que satisfaz a equação $|z-3|<1$

Seja $z = a+bi$. Procuramos os valores para $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $|a+bi-3|<1 \Rightarrow |(a-3)+bi|<1$ pela definição de modulo devemos ter $\sqrt{(a-3)^2+b^2}<1$ e assim $(a-3)^2+b^2<1$.

Sabemos que a equação da circunferência de centro (3, 0) e raio 1 é: $(a-3)^2+(b-0)^2=1$. Portanto a região procurada é a região interior desta circunferência.

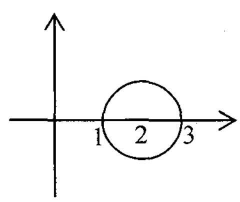


Exemplo 3.3.7. Determinar a região do plano complexo que satisfaz a equação $|z-2|=1$.

Seja $z = a+bi$. Procuramos os valores para $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $|(a-2)+bi|=1$.

Pela definição de módulo devemos ter $\sqrt{(a-2)^2+b^2}=1$ e assim $(a-2)^2+b^2=1$.

Sabemos que a equação da circunferência de centro (2, 0) e raio *1* é: $(a-2)^2+(b-0)^2=1$. Portanto a região procurada é a região constituída pela linha da circunferência



Considerações Finais

O trabalho enfatizou, de forma sintética, a origem e evolução histórica das pesquisas empreendidas a fim de consubstanciar a importância dos Números Complexos para a compreensão da Álgebra.

Com efeito, conheceu-se a relevância dos Números Complexos para o conhecimento da Matemática, precipuamente no que diz respeito ao estudo de Potências, Raízes e Subdomínios de C.

Ficou evidente que, com o estudo de tais números, encontram-se as raízes das equações, bem como se constatou a importância de sua representação gráfica para a determinação de regiões de planos complexos.

Compreendeu-se o mecanismo de representação nas formas algébrica e trigonométrica dos Números Complexos, o que permite determinar ângulos; e, ainda, foi possível definir suas raízes n-ésima complexas, as quais são obtidas pela fórmula de Moivre.

Assim, apesar de se estudar existência dos Números Complexos, eles continuam a ser estranhos, pois têm menos relação com o mundo real que os outros números já conhecidos, haja vista, por exemplo, que um número imaginário não serve para medir a quantidade de água num copo nem para contar o número de dedos que temos.

Referências

ÁVILA, Geraldo S. S. **Função de uma variável complexa.** R.J., LTC; Brasília, Ed Universidade de Brasília, 1974.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências.** 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

DOMINGUES, Hygino H. e IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna.** 4. ed. refor. São Paulo: Atual, 2003.

JANESCH, Oscar Ricardo E TANEJA, Inder Jeet. **Álgebra I.** Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CEM. 2008.

MONTEIRO, L. H. J. **Elementos de Álgebra.** Rio de Janeiro: LTC, 1978.